



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023

CLASA a VIII-a

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.**

- Arătați că, dacă numerele x, y și $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ sunt naturale, atunci și numerele \sqrt{x} și \sqrt{y} sunt naturale.
 - Determinați numerele naturale a, b, n cu proprietatea că $a^2 - b^2 = \sqrt{2023 - n} + \sqrt{n - 1978}$.
- Dacă x, y, z sunt numere reale și $2(3x\sqrt{2} + 2y\sqrt{3} - z\sqrt{5}) = x^2 + y^2 + z^2 + 35$, calculați $x^4 + y^4 + z^4$.
- Fie $ABCD A' B' C' D'$ cub și $M \in (AB), N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{NB} = (\sqrt{3} - 1)^{-1}$.
Notăm $DM \cap AC = \{E\}, AN \cap DB = \{F\}, NC' \cap B'C = \{P\}$ și $MB' \cap A'B = \{Q\}$.
Determinați $m(\sphericalangle EF, PQ)$.
- Pe planul rombului $ABCD$ ducem $VO \perp (ABC)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Fie M și N mijloacele muchiilor VA , respectiv VB . Demonstrați că:
 - Dreptele VO, CM și DN sunt concurente;
 - Dacă $m(\sphericalangle VC, MD) = m(\sphericalangle VD, NC)$, atunci piramida $VABCD$ este o piramidă regulată.