OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor Bogdan Georgescu

a) Arătați că, dacă numerele x, y și $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ sunt naturale, atunci și numerele $\sqrt{x}$ și $\sqrt{y}$ sunt naturale.

b) Determinați numerele naturale a, b, n cu proprietatea că $a^2-b^2=\sqrt{2023-n}+\sqrt{n-1978}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $\sqrt{x}+\sqrt{y}=a, a\in \boldsymbol{N}. a=0 \Leftrightarrow x=y=0 \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{y}=0\in \boldsymbol{N}$ Dacă $a>0 \Rightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})=a(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \Rightarrow x-y=a(\sqrt{x}-\sqrt{y}) \Rightarrow$ $\sqrt{x}-\sqrt{y}\in \boldsymbol{Q}$ (am considerat $x>y$, expresia fiind simetrică)	1p
Cum $\sqrt{x}+\sqrt{y}\in \boldsymbol{Q}$, obținem $2\sqrt{x}\in \boldsymbol{Q} \Rightarrow \sqrt{x}\in \boldsymbol{Q} \Rightarrow x$ pătrat perfect $\Rightarrow$ $\sqrt{x}\in \boldsymbol{N} \Rightarrow \sqrt{y}\in \boldsymbol{N}$.	1p
b) $2023-n, n-1978, a^2-b^2\in \boldsymbol{N} \overset{cf.a)}{\Longrightarrow} 2023-n$ și $n-1978$ sunt pătrate perfecte, cu $1978\le n\le 2023$.	1p
Dacă $2023-n=x^2, n-1978=y^2 \Rightarrow x^2+y^2=45$. Verifică doar $36+9=9+36=45 \Rightarrow n\in\{1987,2014\}$	2p
Obținem $(a-b)(a+b)=9 \Rightarrow a-b=1$ și $a+b=9 \Rightarrow a=5, b=4$ sau $a-b=3$ și $a+b=3 \Rightarrow a=3, b=0$.	2p

Enunţ subiect 2, autor Nicolae Ivăşchescu, G.M. 6-7-8/2022

Dacă x, y, z sunt numere reale și $2(3x\sqrt{2}+2y\sqrt{3}-z\sqrt{5})=x^2+y^2+z^2+35$, calculați $x^4+y^4+z^4$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$x^2-6x\sqrt{2}+18+y^2-4y\sqrt{3}+12+z^2+2z\sqrt{5}+5=0 \Leftrightarrow$ $(x-3\sqrt{2})^2+(y-2\sqrt{3})^2+(z+\sqrt{5})^2=0$	3p
$(x-3\sqrt{2})^2\ge 0, (y-2\sqrt{3})^2\ge 0, (z+\sqrt{5})^2\ge 0 \Rightarrow x-3\sqrt{2}=0, y-2\sqrt{3}=0,$ $z+\sqrt{5}=0 \Rightarrow x=3\sqrt{2}, y=2\sqrt{3}, z=-\sqrt{5}$.	2p
Deci $x^4+y^4+z^4=81\cdot 4+16\cdot 9+25=493$.	2p

Enunţ subiect 3, autor Cristian Olteanu

Fie $ABCDA'B'C'D'$ cub şi $M \in (AB), N \in (BC)$ astfel încât $\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{NB} = \left(\sqrt{3} - 1\right)^{-1}$.
Notăm $DM \cap AC = \{E\}, AN \cap DB = \{F\}, NC' \cap B'C = \{P\}$ și $MB' \cap A'B = \{Q\}$.
Determinați $m(\sphericalangle EF, PQ)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\frac{MB}{AM} = \frac{CN}{NB} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BC}{NB} \Rightarrow AM = NB$ și $MB = NC$	1p
$\Delta AEM \sim \Delta CED \Rightarrow \frac{ME}{ED} = \frac{AM}{DC}$, iar $\Delta NFB \sim \Delta AFD \Rightarrow \frac{BF}{FD} = \frac{NB}{AD} \Rightarrow$	1p
$\frac{ME}{ED} = \frac{BF}{FD} \Rightarrow EF \parallel MB$	1p
$\Delta NPC \sim \Delta C'PB' \Rightarrow \frac{NP}{PC'} = \frac{NC}{B'C'}$, iar $\Delta MQB \sim \Delta B'QA' \Rightarrow \frac{MQ}{QB'} = \frac{MB}{A'B'} \Rightarrow$ $\frac{NP}{PC'} = \frac{MQ}{QB'} \Rightarrow PQ \parallel MC \Rightarrow \sphericalangle(EF, PQ) = \sphericalangle(MB, MC) = \sphericalangle CMB$	2p
În ΔCMB dreptunghic, avem $tg\sphericalangle CMB = \frac{BC}{MB}$ $\frac{MB}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \Rightarrow \frac{MB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{BC}{MB} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\sphericalangle CMB = \sqrt{3} \Rightarrow \sphericalangle CMB = 60°$.	2p

Enunţ subiect 4, autor Traian Preda

Pe planul rombului $ABCD$ ducem $VO \perp (ABC)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$. Fie M și N mijloacele muchiilor VA, respectiv VB. Demonstrați că:
a) Dreptele VO, CM și DN sunt concurente;
b) Dacă $m(\sphericalangle VC, MD) = m(\sphericalangle VD, NC)$, atunci piramida $VABCD$ este o piramidă regulată.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) VO, CM mediane în $\Delta VAC \Rightarrow$ dacă $\{T\} = VO \cap CM$, atunci T este centrul de greutate al $\Delta VAC \Rightarrow \frac{VT}{TO} = 2$. Dar VO mediană și în $\Delta VBD \Rightarrow T$ centrul de greutate al ΔVBD DN mediană în $\Delta VBD \Rightarrow T \in DN \Rightarrow VO, CM$ și DN sunt concurente în T.	2p
b) MO linie mijlocie în $\Delta VAC \Rightarrow MO \parallel VC \Rightarrow \sphericalangle(VC, MD) = \sphericalangle OMD$ Analog $\sphericalangle(VD, NC) = \sphericalangle ONC \Rightarrow \sphericalangle OMD = \sphericalangle ONC$ (1)	1p
$CO \perp (VDB) \Rightarrow CO \perp ON;\ DO \perp (VAC) \Rightarrow DO \perp OM$ (2)	1p
(1), (2) $\Rightarrow \Delta NOC \sim \Delta MOD (U.U.) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{ON}{OM} \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{VD}{VC}$	1p
$\Leftrightarrow \frac{OC^2}{OD^2} = \frac{VO^2 + OD^2}{VO^2 + OC^2} \Leftrightarrow (OC^2 - OD^2)(VO^2 + OC^2 + OD^2) = 0 \Rightarrow OC = OD$	1p
$ABCD$ pătrat, $VO \perp (ABC) \Leftrightarrow VABCD$ este o piramidă regulată.	1p