OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 11.02.2023
CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor ***

Fie numerele naturale m, n, p astfel încât $\frac{\sqrt{2023}}{m} = \frac{n}{\sqrt{p}}$. Știind că m și n sunt prime, determinați $m + n$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$mn = \sqrt{2023p} \Leftrightarrow m^2n^2 = 2023p \Leftrightarrow m^2n^2 = 17^2 \cdot 7 \cdot p \Rightarrow$	3p
$17 \mid m^2n^2$, cu m, n prime $\Rightarrow 17 \mid m$ sau $17 \mid$n $\Rightarrow m = 17$ sau $n = 17$	2p
Dacă $m = 17 \Rightarrow 17^2n^2 = 17^2 \cdot 7 \cdot p \Rightarrow 7 \mid n^2 \Rightarrow n = 7$ Analog, dacă $n = 17 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow m + n = 24$.	2p

Enunţ subiect 2, autori Cristina și Mihai Vijdeluc, G.M. 10/2022

Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $a(n) = \sqrt{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^5 + 145}$ este natural.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$a(n) \in \boldsymbol{N} \Leftrightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^5 + 145$ este pătrat perfect	1p
I. $n \geq 5 \Rightarrow (n!)^5 = M_{25}, 145 = M_{25} + 20 \Rightarrow 5 \mid (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^5 + 145$ și $25 \nmid (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^5 + 145 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^5 + 145$ nu este pătrat perfect	2p
II. $n = 4 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^5 + 145 = (M_7 + 3)^5 + M_7 + 5 = M_7 + 3^5 + M_7 + 5$ $=$ $M_7 + 5 + M_7 + 5 = M_7 + 3$ nu este pătrat perfect	1p
III. $n = 3 \Rightarrow (1 \cdot 2 \cdot 3)^5 + 145 = 7921 = 89^2 \Rightarrow n = 3$ soluție	1p
III. $n = 2 \Rightarrow (1 \cdot 2)^5 + 145 = 177$ nu este pătrat perfect	1p
III. $n = 1 \Rightarrow 1^5 + 145 = 146$ nu este pătrat perfect	1p

Enunţ subiect 3, autor Traian Preda

Fie triunghiul echilateral ABC și punctul D situat în același semiplan ca punctul A față de dreapta BC, iar punctul $E \in (DC)$, astfel încât $AB = BD = DE$ și $\sphericalangle ABD = 40°$. Dacă $\{F\} = AE \cap BC$,

a) Arătați că $(BE$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$;
b) Determinați măsura $\sphericalangle FDC$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) ΔBDC isoscel $(BD = BC), \sphericalangle BDC = 100° \Rightarrow \sphericalangle BDC = 40°$	1p
ΔBDE isoscel $(BD = DE) \Rightarrow \sphericalangle DBE = 70° \Rightarrow \sphericalangle ABE = 70° - 40° = 30° \Rightarrow$ $(BE$ este bisectoarea $\sphericalangle ABC$	1p
b)Notăm $AB \cap DE = \{O\} \Rightarrow \sphericalangle ODB = \sphericalangle OBD = 40° \Rightarrow \Delta OBD$ isoscel $\Rightarrow$ $OB = OD$. Cum $AB = DE \Rightarrow AO = OE \Rightarrow \Delta OAE$ isoscel	1p
Cum $\sphericalangle AOE = \sphericalangle BOD = 100° \Rightarrow \sphericalangle OAE = \sphericalangle OEA = 40° \Rightarrow$ $\sphericalangle AFB = 180° - (60° + 40°) = 80°$ și $\sphericalangle BOE = 180° - 100° = 80°$	1p
Obținem $\Delta BEO \equiv \Delta BEF$ $(L.U.U.) \Rightarrow OB = BF$ Cum $\sphericalangle OBF = 60° \Rightarrow \Delta BOF$ echilateral $\Rightarrow OF = OB$.	2p
Dar $OB = OD \Rightarrow OF = OD \Rightarrow \Delta OFD$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ODF = \sphericalangle CDF = 10°$.	1p

Enunţ subiect 4, autor Mihaela Berindeanu

Fie cercul de diametru AB și punctele C și D pe cerc, de o parte și de alta a dreptei AB. Notăm $BD \cap AC = \{E\}, BC \cap AD = \{F\}$, iar O este centrul cercului circumscris ΔAEF. Dacă $OC \parallel ED$:

a) Calculați măsura $\sphericalangle DAC$;
b) Arătați că $ODBC$ este paralelogram.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\sphericalangle ADB = 90°$ (unghi înscris în semicerc), iar $CO \parallel BD \Rightarrow CO \perp AF$	2p
O centrul cercului circumscris $\Delta AEF, CO \perp AF \Rightarrow CO$ mediatoarea lui $AF \Rightarrow$ ΔCAF isoscel	1p
$\sphericalangle ACB = 90°$ (unghi înscris în semicerc) $\Rightarrow \Delta CAF$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $\sphericalangle CAF = 45°$	1p
b) $\sphericalangle CAF = 45°, \sphericalangle ADE = 90° \Rightarrow \Delta DAE$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow DA = DE$	1p
Cum $OA = OE$ (raze) și $DA = DE \Rightarrow DO$ mediatoarea lui $AE \Rightarrow$	1p
$DO \perp AE$. Dar $BC \perp AE \Rightarrow DO \parallel BC$ și cum $CO \parallel BD \Rightarrow ODBC$ paralelogram.	1p